

Оглавление

1. Критерий полноты системы функций алгебры логики	2
2. Проблема полноты в k -значной логике. Алгоритм распознавания Полноты	2
3. Ограниченно-детерминированные функции. Операции суперпозиции и обратной связи над ними. Конечная порожденность класса о.-д. функции относительно этих операций.	3
4. Алфавитное кодирование. Алгоритм распознавания однозначности алфавитного кодирования .	4
5. Эквивалентные преобразования в функциональных системах. Конечные полные системы тождеств для ФАЛ и СФЭ.	5
6. Сокращенные, тупиковые, минимальные дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.), алгоритмы их построения. Оценки сложности д.н.ф.	5
7. Метод Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов	7
8. Сложность алгоритмов. Классы P и NP. Теорема об NP-полноте задачи о выполнимости.	8
9. Независимые случайные величины. Критерий независимости случайных величин.	9
10. Моменты случайных величин. Свойства математических ожиданий и дисперсий.	10
11. Центральная предельная теорема	11
12. Точечные и интервальные оценки неизвестных параметров распределения. Свойства точечных оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность, оптимальность). Два метода построения точечных оценок (метод максимального правдоподобия, метод моментов)	11
13. Основные понятия о проверке статистических гипотез. Лемма Неймана-Пирсона	13
14. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.	14
15. Виды сходимости последовательностей случайных величин.	15
16. Основная теорема матричных игр	15
17. Иерархические игры и их решение.	16
18. Теорема Гермейера о решении игры	17
19. Принцип уравнивания в задаче оптимального распределения ресурсов	17
20. Выпуклые множества и выпуклые функции. Необходимое и достаточное условие оптимальности в общей задаче минимизации	18
21. Задачи линейного программирования: прямая и двойственная, их свойства. Основная идея симплекс-метода	19
22. Описание статистической модели Леонтьева. Условие продуктивности.	21
23. Модель Курно	22
24. Постановка задачи оптимального управления. Понятие о задаче синтеза	23
25. Множество достижимости линейной управляемой системы. Его опорная функция.	24
26. Управляемость и локальная управляемость линейных систем.	25
27. Принцип Максимума Понтрягина для линейной задачи быстрогодействия.	26

28. Уравнения в вариациях. Построение конуса касательных направлений к множеству достижимости.....	27
29. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с интегральным функционалом	28
30. Понятие о методе динамического программирования.....	29

1. Критерий полноты системы функций алгебры логики

Опр. Система функций $\{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$ из P_2 называется функционально полной, если любая булева функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Обозначим через T_0 класс всех булевых функций, сохраняющих константу 0, т.е. функций, для которых выполнено равенство $f(0, \dots, 0) = 0$.

Обозначим через T_1 класс всех булевых функций, сохраняющих константу 1, т.е. функций, для которых выполнено равенство $f(1, \dots, 1) = 1$.

Обозначим через S класс всех самодвойственных функций, т.е. функций f из P_2 , таких что $f^* = f$, т.е. $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$.

Опр. Функция f называется монотонной, если $\forall$ двух наборов α и β : $\alpha \preceq \beta$, имеет место равенство $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

Обозначим через M множество всех монотонных функций.

Теорема (о функциональной полноте). Для того чтобы система функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L .

2. Проблема полноты в k-значной логике. Алгоритм распознавания Полноты

Опр. Система B функций $f_1, f_2, \dots, f_s, \dots$ из P_k называется функционально полной, если любая функция из P_k может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Теорема. Система $B = \{0, 1, \dots, k-1, I_0(x), \dots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$ является полной в P_k , где $I_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = i \\ 0, & \text{при } x \neq i, i = 0, 1, \dots, k-1. \end{cases}$

Теорема. Существует алгоритм для распознавания полноты.

Доказательство. Построим по индукции последовательность множеств $R_0, R_1, \dots, R_r, \dots$ функций

от двух переменных

Базис индукции.

Положим $R_0 = \Lambda$, где Λ – пустое множество.

Индуктивный переход.

Пусть уже построены множества $R_0, R_1, \dots, R_r$, построим R_{r+1} :

Выпишем функции, входящие в R_r ($r \geq 0$): $R_r = \{h_1(x_1, x_2), \dots, h_{s_r}(x_1, x_2)\}$ ($s_r = 0$ при $r = 0$), и

для каждого $i = 1, \dots, s$ рассмотрим всевозможные формулы вида $f_i(H_1(x_1, x_2), \dots, H_s(x_1, x_2))$, где $H_j(x_1, x_2)$ есть либо функция $h_j(x_1, x_2)$ ($j = 1, \dots, s_r$), либо $g_j^2(x_1, x_2)$.

Просматривая формулы, мы получим функции, не вошедшие в $R_r: h_{s_r+1}(x_1, x_2), \dots, h_{s_r+1}(x_1, x_2)$.

Положим $R_{r+1} = R_r \cup \{h_{s_r+1}(x_1, x_2), \dots, h_{s_r+1}(x_1, x_2)\}$.

Очевидно, что $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_r \subseteq \dots$.

Из построения ясно, что если $R_{r+1} = R_r$, то $R_r = R_{r+1} = \dots$, т.е. цепочка множеств стабилизируется.

Обозначим через r^* минимальный номер множества, начиная с которого наступает стабилизация. Тогда цепочка множеств $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_{r^*}$ строго возрастает.

Момент стабилизации может быть обнаружен через ограниченное число шагов.

Рассмотрим множество R_{r^*} .

Возможны два случая.

1. R_{r^*} содержит все функции от двух переменных x_1, x_2 и, значит, содержит $V_k(x_1, x_2)$. Тогда исходная система полна.
2. R_{r^*} не содержит всех функций от двух переменных. Поскольку в этом случае замыкание

$[B]_{x_1 x_2} = R_{r^*}$, то замыкание $[B]$ не содержит всех функций от переменных

Следовательно, B не полна.

Алгоритм: строим классы $R_0, R_1, \dots, R_{r^}$ до момента стабилизации и рассматриваем класс R_{r^*} , по которому и определяем, имеет место полнота для B или нет.*

3. Ограниченно-детерминированные функции. Операции суперпозиции и обратной связи над ними. Конечная порожденность класса о.-д. функции относительно этих операций.

Опр. Функция $f(X)$ называется **детерминированной**, если каково ни было число m и каковы бы ни были последовательности α и β такие, что $\alpha(1) = \beta(1)$, $\alpha(2) = \beta(2)$, ..., $\alpha(m) = \beta(m)$, значения γ и δ функции f , где $\gamma = f(\alpha)$, $\delta = f(\beta)$, представляют собой последовательности, у которых тоже совпадают первые m членов.

Опр. Детерминированная функция называется **ограниченно-детерминированной**, если она имеет конечный вес.

Замкнутость класса о.-д. функций относительно операции суперпозиции.

$$f = f_1(f_2)$$

$$f_1 : \begin{cases} y_1(t) = F_1(x_1(t), q_1(t-1)) \\ q_1(t) = G_1(x_1(t), q_1(t-1)) \\ q_1(0) = 0 \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} y_2(t) = F_2(x_2(t), q_2(t-1)) \\ q_2(t) = G_2(x_2(t), q_2(t-1)) \\ q_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f : \begin{cases} y(t) = F_1(F_2(x_2(t), q_2(t-1)), q_1(t-1)) \\ q_1(t) = G_1(F_2(x_2(t), q_2(t-1)), q_1(t-1)) \\ q_2(t) = G_2(x_2(t), q_2(t-1)) \\ q_1(0) = 0 \\ q_2(0) = 0 \end{cases}$$

Теорема 3. Класс детерминированных функций замкнут относительно операции суперпозиции.

Теорема 4. Класс о.-д. функций замкнут относительно операции суперпозиции.

Операция введения обратной связи. Замкнутость класса о-д функций относительно операции введения обратной связи.

Опр. Детерминированная функция $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ зависит от переменной x_i с запаздыванием, если для любых входных последовательностей $\alpha_i = \{\alpha_i(1), \alpha_i(2), \dots, \alpha_i(t), \dots\}$, $i = 1, \dots, n$ и любого момента времени t значение $\gamma(t)$, где $\gamma = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, полностью определяется значениями первых t членов последовательностей $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ и значениями $t-1$ членов последовательности α_i .

$$f : \begin{cases} y_1(t) = F_1(x_1(t), x_2(t), q(t-1)) \\ y_2(t) = F_2(x_1(t), x_2(t), q(t-1)) \\ q(t) = G(x_1(t), x_2(t), q(t-1)) \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

Пусть f зависит от x_1 с запаздыванием. Введем обратную связь по переменным x_1 и y_1 .

$$\text{Тогда } y_1(t) = F_1'(x_2(t), q(t-1)) \text{ и } \tilde{f} : \begin{cases} y(t) = F_2(F_1'(x_2(t), q(t-1)), x_2(t), q(t-1)) \\ q(t) = G(F_1'(x_2(t), q(t-1)), x_2(t), q(t-1)) \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

Теорема 5. Класс о-д функций замкнут относительно операции обратной связи.

Теорема 6. Пусть для системы о-д функций $\{f_1, \dots, f_m\}$, где $m > 2$, возможно введение обратных связей и в порядке (y_1, x_1) , (y_2, x_2) , и в порядке (y_2, x_2) , (y_1, x_1) . Тогда результаты применения операции обратной связи совпадают.

Теорема 7. Класс замкнут относительно операций C и O .

4. Алфавитное кодирование. Алгоритм распознавания однозначности алфавитного кодирования

Опр. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ — исходный алфавит, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ — кодирующий алфавит, $A^* = \emptyset \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots \cup A^r \cup \dots$, $B^* = \emptyset \cup B \cup B^2 \cup B^3 \cup \dots \cup B^m \cup \dots$ (множества всех возможных слов в алфавитах).

Тогда алфавитным кодированием $A^* \rightarrow B^*$ назовём отображение $\phi : A \rightarrow B^*$ такое, что $a_i \rightarrow B_i$.

Множество $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ при этом называется множеством *кодовых слов* (или просто *кодом*). При этом $\phi : a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s} \rightarrow B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_s}$.

Пусть W — максимальное число кодовых слов, которые «помещаются» подряд внутри кодового

слова. Пусть l_i — длина слова B_i и
$$L = \sum_{i=1}^r l_i.$$

Собственно алгоритм определения однозначности некоторого кодирования ϕ , следующий из

теоремы: кодируются все слова, длины не более $\left\lfloor \frac{L-r+2}{2(W+1)} \right\rfloor$. Если все коды получились уникальными, значит и для всех более длинных слов нарушений однозначности не будет.

5. Эквивалентные преобразования в функциональных системах. Конечные полные системы тождеств для ФАЛ и СФЭ.

Опр. Функциональная система: пара (Σ, f) , где f - некоторая функция алгебры логики, Σ - способ реализации этой функции. Σ может быть контактной схемой (КС), схемой из функциональных элементов (СФЭ) или формулой в базисе $(\vee, \&, \neg)$. Символом $f \Sigma$ будем обозначать схему, реализующую нек. функцию f .

Опр. Будем говорить, что $f \Sigma$ эквивалентно $f' \Sigma'$ ($f \Sigma \sim f' \Sigma'$), если $f = f'$. Аналогично $V = (\Sigma, f) \sim V' = (\Sigma', f')$ если $f = f'$.

Опр. Подстановка это корректная замена подсхемы Σ' на подсхему Σ'' . Подстановка является эквивалентной, если $\Sigma' \sim \Sigma''$.

Пусть от схемы ${}_1\Sigma$ с помощью эквивалентной подстановки переходим к схеме ${}_2\Sigma$ (${}_1\Sigma \rightarrow {}_2\Sigma$), от ${}_2\Sigma$ к ${}_3\Sigma$, и так далее до ${}_p\Sigma$. Тогда ${}_p\Sigma$ получена из ${}_1\Sigma$ с помощью эквивалентных преобразований (${}_p\Sigma \Rightarrow \Sigma_1$). Очевидно, что в таком случае верно и ${}_1\Sigma \Rightarrow \Sigma_p$. В таком случае можно говорить, что ${}_1\Sigma \sim {}_p\Sigma$ относительно системы тождеств T (эти тождества использовались при эквивалентных подстановках).

Опр. Система тождеств T полна в рассматриваемом классе функциональных систем K , если $\forall \Sigma \sim \Sigma', \Sigma, \Sigma' \in K \Rightarrow \Sigma \Sigma'$.

Теорема. Для класса формул в базисе $= \{\vee, \&, \neg\}$ о B существует конечная полная система тождеств.

Опр. Для схем из функциональных элементов в определении эквивалентности нужно уточнить, что схемы Σ и Σ' эквивалентны, если у них одинаковые наборы входов, выходов, и все реализованные функции также одинаковы.

Теорема. В классе СФЭ существует КПСТ.

6. Сокращенные, тупиковые, минимальные дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.), алгоритмы их построения. Оценки сложности д.н.ф.

Определение. Функции x_i и $\bar{x}_i$ будем называть буквами булевых переменных (БП) x_i .

Определение. Конъюнкция (дизъюнкция) r , $1 \leq r \leq n$, букв различных БП из множества $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ называется элементарной конъюнкцией (ЭК) (соответственно элементарной дизъюнкцией (ЭД)) ранга r от булевых переменных $X(n)$.

Определение. Дизъюнкция различных элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), а конъюнкция различных элементарных дизъюнкций – конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Определение. ДНФ (КНФ) считается совершенной, если все ее ЭК (соответственно ЭД) существенно зависят от одних и тех же БП, а их ранг равен числу этих БП.

Определение. Число ЭК (ЭД) в ДНФ (соответственно КНФ) $\mathfrak{A}$ называется ее длиной и обозначается через $\lambda(\mathfrak{A})$.

Любую ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, отличную от константы можно представить в виде ее совершенных ДНФ и КНФ следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N_f} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \bigwedge_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \bar{N}_f} (x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_n^{\beta_n})$$

Определение. Будем говорить, что ФАЛ f' имплицирует ФАЛ f'' или, иначе, ФАЛ f'' поглощает ФАЛ f' , если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$, то есть импликация $(f' \rightarrow f'')$ тождественно равна 1.

Определение. ЭК, которая имплицирует ФАЛ f , называется импликантой этой ФАЛ.

Определение. Импликанта K ФАЛ f называется простой импликантой этой ФАЛ, если она не поглощается никакой другой отличной от нее импликантой ФАЛ f .

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f называется ее сокращенной ДНФ.

Алгоритм (метод Блейка). Данный алгоритм использует систему тождеств:

- тождество ассоциативности

$$t_o^A : x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$$

- тождество коммутативности

$$t_o^K : x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$$

- тождество отождествления БП

$$t_o^{on} : x \circ x = x,$$

где $\circ \in \{\&, \vee\}$

- тождество дистрибутивности " $\circ$ " относительно " $\diamond$ "

$$t_{\circ, \diamond}^D : x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

- тождества де Моргана

$$t_{\neg}^M : \overline{(x_1)} = x_1, \quad t_{\circ}^M : \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\overline{x_1}) \diamond (\overline{x_2}),$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$

- тождества подстановки констант

$$t_{0, \&}^{nk} : x_1(x_2 \cdot \overline{x_2}) = x_2 \cdot \overline{x_2}, \quad t_{1, \&}^{nk} : x_1(x_2 \vee \overline{x_2}) = x_1,$$

$$t_{0, \vee}^{nk} : x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_2} = x_1, \quad t_{1, \vee}^{nk} : x_1 \vee (x_2 \vee \overline{x_2}) = x_2 \vee \overline{x_2}$$

- тождество поглощения

$$t^n : x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$$

- тождество обобщенного склеивания

$$t^{oc} : x_1 x_2 \vee \overline{x_1} x_3 = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} x_3 \vee x_1 x_3$$

Определение. Минимальной (кратчайшей) ДНФ ФАЛ f называется ДНФ, имеющая минимальный ранг (соответственно длину) среди всех ДНФ, реализующих f .

Лемма 1.

Функция покрытия $F(y_1, \dots, y_p)$ матрицы M , $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов, задается КНФ вида:

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left(\bigvee_{1 \leq i \leq p, M(i,j)=1} y_i \right). \quad (6)$$

Следствие.

В результате раскрытия скобок и приведения подобных из КНФ (6) можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M .

Поскольку длина любой тупиковой ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем 2^n , а число различных граней куба B^n равно 3^n , то, следовательно, число тупиковых ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем

$$2^n \binom{3^n}{2^n} \leq 2^n \cdot \frac{3^n \cdot 2^n}{(2^n)!} \leq 3^n \cdot 2^n.$$

Теорема 3.

Для любого $n, n \in \mathbb{N}$, и для почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, имеют место соотношения:

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, \quad R(n) = n \cdot 2^{n-1}, \\ \lambda(f) \lesssim \frac{3}{4} 2^{n-1}, \quad R(f) \lesssim \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1}$$

7. Метод Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов

Теорема (О.Б. Лупанов). Для схем из Ф.Э. в базисе, состоящем из инвертора, дизъюнктора и конъюнктора, можно построить асимптотически наилучший метод синтеза и

$$L(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Алгоритм:

1. Зададим произвольную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ при помощи таблицы размера $2^k \times 2^{n-k}$

Строки этой таблицы нумеруем наборами значений по переменным $x_1, \dots, x_k$, столбцы – по переменным $x_{k+1}, \dots, x_n$. На пересечении строки $[(\sigma)_1, \dots, (\sigma)_k]$ и столбца

$$[(\sigma)_{k+1}, \dots, (\sigma)_n]$$

помещаем значение $f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$.

Легко видеть, что столбец с номером $[(\sigma)_{k+1}, \dots, (\sigma)_n]$ задает функцию $f(x_1, \dots, x_k, (\sigma)_{k+1}, \dots, (\sigma)_n)$, являющуюся компонентой разложения

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{[(\sigma)_{k+1}, \dots, (\sigma)_n]} x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots x_n^{\sigma_n} f(x_1, \dots, x_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n), \quad (*)$$

2. Возьмем целое число $s, 1 \leq s \leq 2^k$, и разрежем таблицу на полосы шириной s .

Занумеруем сверху вниз полученные полосы числами $1, 2, \dots, p$, где $p = \left\lfloor \frac{2^k}{s} \right\rfloor$.

3. рассмотрим полосу с номером i и строками $[(\sigma)_1(1), \dots, (\sigma)_k(1)], \dots, [(\sigma)_1(s), \dots, (\sigma)_k(s)]$.

Эта полоса распадается на короткие столбцы высоты s . Поэтому число $t(i)$ сортов

коротких столбцов будет не более $t(i)$. Произведем нумерацию этих сортов числами $1, 2, \dots, t(i)$.

4. Пусть $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ - столбец j -го сорта. Обозначим через $f_{ij}(x_1, \dots, x_k)$ булеву функцию, определяемую этим коротким столбцом:

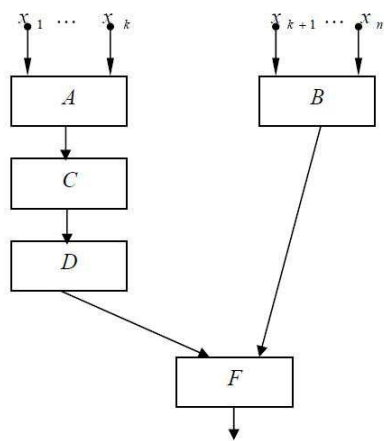
Столбец с номером $[(\sigma)_{k+1}, \dots, (\sigma)_n]$ разрезается полосами на p коротких столбцов.

Поэтому

$$f(x_1, \dots, x_k, (\sigma)_{k+1}, \dots, (\sigma)_n) = f_{i1}(1/j_1 1)(x_1, \dots, x_k) \vee \dots \vee f_{ip}(p/j_p p)(x_1, \dots, x_k), \quad (**)$$

где j_i - номер сорта соответствующего короткого столбца, принадлежащего i -ой полосе.

Теперь перейдем к описанию схемы Σ . Ее мы получим в виде соединения отдельных блоков.



1. Блок A реализует все конъюнкции $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_k^{\sigma_k}$, $L(A) \leq k2^k$.
2. Блок B реализует все конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}}, \dots, x_n^{\sigma_n}$, $L(B) \leq (n-k)2^{(n-k)}$.
3. Блок C реализует по совершенной д.н.ф. функции $f_y(x_1, \dots, x_k)$,
 $L(C) \leq (s-1)(t(1)+\dots+t(p)) < sp2^s$.
4. Блок D реализует функции $f(x_1, \dots, x_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$ на основе формулы (**),
 $L(D) \leq (p-1)2^{n-k} < p2^{n-k}$.

5. Блок F реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ исходя из ее разложения (*),

$$L(F) \leq 2^{n-k} + 2^{n-k} - 1 < 2 \cdot 2^{n-k}.$$

Поэтому

$$L(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

В силу произвольности функции отсюда следует, что

$$L(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

8. Сложность алгоритмов. Классы P и NP. Теорема об NP-полноте задачи о выполнимости.

Опр. МТ называется *детерминированной*, если для каждой пары вида (a, q) , $a \in A, q \in Q$ в программе МТ присутствует не более одной команды вида $aq \rightarrow a' q' d$.

Опр. Если существует пара (a, q) , для которой существует ≥ 2 команд, начинающихся с aq , то МТ называется *недетерминированной*.

Обз. Пусть A – конечный алфавит. Через A^* обозначим множество всех конечных слов в алфавите A .

Опр. Произвольное подмножество $L \in A^*$ называется *языком* в алфавите A .

Обз. Через P обозначим класс языков, распознающихся МТ за полиномиальное время.

Обз. Класс языков, распознающихся НМТ за полиномиальное время, обозначим через NP .

Опр. Пусть Π – множество отображений вида $f: A^* \rightarrow A^*$, вычисляемых МТ за полиномиальное время. Пусть L и K – языки. Говорят, что L *полиномиально сводится* к K ($L \leq K$), если существует $f \in \Pi: f(w) \in K \Leftrightarrow w \in L$.

Опр. Язык называется *NP-полным*, если:

- 1) $L \in NP$;
- 2) $\forall K \in NP \Rightarrow K \leq L$.

Язык Выполнимость (ВЫП):

$A = \{ (,), \&, \neg, x_i, i=1,2,... \}$

$w \in \text{ВЫП} \Leftrightarrow w\text{-КНФ, не равная тождественно } 0.$

Теорема Кука. Если $L \in NP$, то $L \leq \text{ВЫП}$.

Следствие теоремы Кука. Язык ВЫП – NP-полный.

Язык k-ВЫП.

ВХОД: k-КНФ $F(x_1, \dots, x_n)$;

СВОЙСТВО: выполнимость.

k-КНФ – конъюнкция скобок, каждая из которых является дизъюнкцией не более k букв.

Теорема. Язык $\text{ВЫП} \in NP$.

9. Независимые случайные величины. Критерий независимости случайных величин.

Определение. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются независимыми, если

$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ – борелевская σ -алгебра множеств на числовой прямой $\mathbf{R}$, $\Rightarrow$

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

Теорема (критерий независимости случайных величин). Для того, чтобы $\xi_1, \dots, \xi_n$ были взаимно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе n интервалов $[a_1, b_1), \dots, [a_n, b_n)$ на числовой прямой

$$P\{w: a_1 \leq \xi_1 < b_1, \dots, a_n \leq \xi_n < b_n\} = P\{w: a_1 \leq \xi_1 < b_1\} \cdot \dots \cdot$$

$$P\{w: a_n \leq \xi_n < b_n\}$$

$$P\{w: \dots\}$$

Свойства независимых случайных величин:

Для независимых случайных величин X и Y

$$E(XY) = EX EY, D(X+Y) = DX + DY$$

10. Моменты случайных величин. Свойства математических ожиданий и дисперсий

Определение 1. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) \quad (1)$$

При этом если $E\xi < \infty$, то говорят, что математическое ожидание существует.

Определение 2. Моментом порядка k случайной величины ξ называется математическое ожидание случайной величины $\xi^k : E\xi^k$.

Определение 3. Центральным моментом порядка k случайной величины ξ называется

$$E(\xi - E\xi)^k$$

Определение 4. Центральным моментом порядка 2 случайной величины ξ называется

Дисперсией случайной величины ξ :

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Все введенные величины однозначно определяются распределением вероятностей случайной величины ξ .

Свойства моментов.

Свойства математического ожидания:

1. $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$.

2. $\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq 0$.

3. $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$.

4. $|E\xi| \leq E|\xi|$.

5. $EC = C$.

Свойства дисперсии:

6. $D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi$.

7. $D(\xi + C) = D\xi$.

8. $\exists E\xi^k < \infty \Rightarrow \exists E\xi^m, \forall m \leq k (|\xi^m| \leq 1 + |\xi^k|, m \leq k)$

Введем следующие определения.

Определение. Ковариацией случайных величин ξ и η называется величина

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Определение. Корреляцией случайных величин ξ и η называется величина

$$\text{cor}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}}$$

Продолжим ряд свойств:

9. Если ξ и η независимы, то $E\xi\eta = E\xi E\eta$, при условии что математические ожидания существуют. Обратное неверно.

10. Если ξ и η независимы, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0, D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

11. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$ если ξ и η - не независимые.

12. $|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \frac{D\xi + D\eta}{2}$

13. $|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi} + \sqrt{D\eta} \Rightarrow |\text{cor}(\xi, \eta)| \leq 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\exists a, b \in R : \eta = a\xi + b$.

11. Центральная предельная теорема

Опр. Пусть ξ - случайная величина. Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция, определённая $\forall t \in \mathbb{R}$ как $\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + i \cdot E \sin(t\xi)$.

Теорема (Хинчин). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, у которых существует $E\xi_i = a$. Обозначим

$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Тогда выполняется закон больших чисел, то есть $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$.

Теорема (Центральная предельная теорема). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $E\xi_i = a$,

$D\xi_i = \sigma^2$. Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi$, $\xi \square N(0,1)$ по распределению, или, что то же самое

$$P\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

12. Точечные и интервальные оценки неизвестных параметров распределения. Свойства точечных оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность, оптимальность). Два метода построения точечных оценок (метод максимального правдоподобия, метод моментов)

Точечное оценивание.

Рассматривается выборка $X_1, \dots, X_n$ с функцией распределения $F(x, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$.

Опр. Статистикой размерности k называется вектор-функция $T(X) = (T_1(X), \dots, T_k(X))$, где $T_i(X)$ - статистика $\forall i = 1, \dots, k$.

Опр. Точечной оценкой параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ называется m -мерная статистика $T(X) = (T_1(X), \dots, T_m(X))$. При этом $T_i(X)$ считается оценкой θ_i .

Опр. Оценка $T(X) = (T_1(X), \dots, T_k(X))$ называется несмещенной оценкой функции $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \dots, \tau_k(\theta))$, если для любого θ выполняется $E_{\theta} T_i(X) = \tau_i(\theta)$, $i = 1, \dots, k$.

Опр. Оценка $T(X) = (T_1(X), \dots, T_k(X))$ называется асимптотически несмещенной оценкой функции $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \dots, \tau_k(\theta))$, если $E_{\theta} T_i(X) = \tau_i(\theta) + \alpha_{ni}(\theta)$ и $\alpha_{ni}(\theta) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого θ и для любого $i = 1, \dots, k$.

Опр. Оценка $T(X)$ называется состоятельной оценкой функции $\tau(\theta)$, если $T(X) \rightarrow \tau(\theta)$ по вероятности при увеличении объема выборки ($n \rightarrow \infty$) для любого θ .

Опр. Оценка $T(X)$ функции $\tau(\theta)$ называется оптимальной, если

1. $T(X)$ - несмещенная, то есть $E_{\theta} T(X) = \tau(\theta)$ и
2. $T(X)$ имеет равномерно минимальную дисперсию, то есть для любой другой несмещенной оценки $T_1(X)$ функции $\tau(\theta)$ выполняется $D_{\theta} T(X) \leq D_{\theta} T_1(X)$ для любой выборки X .

Теорема. Если существует оптимальная оценка функции $\tau(\theta)$, то она единственна.

Функция правдоподобия.

Опр. Функцией правдоподобия выборки $X_1, \dots, X_n$ называется функция
 $L(X, \theta) = p(X_1, \theta) \cdots p(X_n, \theta)$.

Функция правдоподобия является случайной величиной.

Метод моментов.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ - выборка с распределением $F(x, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим $E_{\theta} X_1^k = \alpha_k(\theta)$. Предположим, что система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{i_1}(\theta) = A_{i_1}, \\ \alpha_{i_2}(\theta) = A_{i_2}, \\ \vdots \\ \alpha_{i_m}(\theta) = A_{i_m}, \end{cases} \quad i_j \neq i_l, \Leftarrow j \neq l$$

однозначно разрешима, причём её решение даётся обратимыми функциями

$$\begin{cases} \theta_1 = \psi_1(A_{i_1}, \dots, A_{i_m}), \\ \vdots \\ \theta_m = \psi_m(A_{i_1}, \dots, A_{i_m}), \end{cases} \quad i_j \neq i_l, \Leftarrow j \neq l$$

Оценки, полученные таким способом, называются точечными оценками, полученными методом моментов. Суть метода заключается в том, что выборочные моменты приравниваются теоретическим, откуда получают значения параметров.

Теорема. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_m$ являются непрерывными функциями от моментов $\hat{\theta}_i = \psi_i(A_{j_1}, \dots, A_{j_m})$, $i = 1, \dots, m$. Тогда оценки, полученные методом моментов с моментами порядков $j_1, \dots, j_m$, будут состоятельными и асимптотически несмещёнными.

Метод максимального правдоподобия.

Пусть $L(X, \theta)$ - функция правдоподобия выборки X .

Опр. Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$ параметра θ называется такое значение параметра, что $\max L(X, \theta) = L(X, \hat{\theta}(X))$.

Свойства метода максимального правдоподобия:

1. Если $\hat{\theta}(X)$ - оценка максимального правдоподобия θ и $\tau(\theta)$ - взаимно однозначная функция θ , то оценкой максимального правдоподобия функции $\tau(\theta)$ является функция $\tau(\hat{\theta}(X))$.
2. Если существует достаточная статистика $T(X)$, то оценка максимального правдоподобия есть функция $T(X)$: $\hat{\theta}(X) = \varphi(T(X))$.
3. Критерий факторизации: $L(X, \theta) = g(T(X), \theta) \cdot h(X)$.
4. Если существует эффективная оценка параметра θ , то она совпадает с оценкой максимального правдоподобия: $\exists \tilde{\theta}(X) \Rightarrow \hat{\theta}(X) = \tilde{\theta}(X)$. Действительно,

$$\tilde{\theta}(X) - \theta = a_n(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta} \quad \forall \theta. \text{ Пусть теперь } \theta = \hat{\theta}(X) - \text{ оценка максимального}$$

правдоподобия. Тогда $\tilde{\theta}(X) - \hat{\theta}(X) = a_n \cdot 0$, так как это точка, в которой достигается максимум функции правдоподобия.

Опр. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ асимптотически нормальна,

если существуют такие $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, что $\frac{\xi_n - a_n}{b_n} \rightarrow \xi \sim N(0, 1)$.

Опр. Оценка $T_n(X)$ называется асимптотически нормальной, если

$$\frac{T_n(X) - a_n(\theta)}{b_n(\theta)} \rightarrow N(0, 1).$$

Рассмотрим неравенство Рао-Крамера: $D_{\theta}T_n(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{E_{\theta}U^2(X, \theta)}$,
 $U = \frac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(X_i, \theta)}{\partial \theta} \Rightarrow E_{\theta}U^2(X, \theta) = nE_{\theta} \frac{\partial p(X_1, \theta)}{\partial \theta} = n \cdot i(\theta)$, где $i(\theta)$ – некоторая функция.

Опр. Оценка $T_n(X)$ функции $\tau(\theta)$ называется асимптотически эффективной, если $\frac{D_{\theta}T_n(X) \cdot ni(\theta)}{(\tau'(\theta))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Пусть выполняются следующие два условия:

- 1) функция правдоподобия удовлетворяет условиям регулярности для первых двух производных (условиям регулярности второго порядка),
- 2) оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$ для всех θ существует, единственна и достигается во внутренней точке множества Θ .

Тогда оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$

- 1) асимптотически несмещена,
- 2) состоятельна,
- 3) асимптотически эффективна
- 4) асимптотически нормальна: $\sqrt{n \cdot i(\theta)}(\hat{\theta}(X) - \theta) \rightarrow N(0, 1)$.

Интервальное оценивание.

Опр. Доверительным интервалом с коэффициентом доверия $0 \leq \alpha \leq 1$ называется совокупность двух статистик $(T_1(X), T_2(X))$ таких, что

1. $\forall \theta \Rightarrow T_1(X) \leq T_2(X)$ почти всюду
2. $\forall \theta \Rightarrow P_{\theta}(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq \alpha$ иногда (= или >).

При таком распределении точность оценивания есть длина интервала, а надежность – вероятность попадания параметра в этот интервал. Мы фиксируем надежность и ищем наиболее узкий интервал.

13. Основные понятия о проверке статистических гипотез. Лемма Неймана-Пирсона

Гипотезы.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка с распределением $F(X, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset R$. В этом случае любое подмножество $\Theta_0 \subset \Theta$ соответствует гипотезе: $\Theta_0 \rightarrow H_0: \theta \in \Theta_0$ – основная гипотеза, $\Theta_1 \rightarrow H_1: \theta \in \Theta_1$ – альтернатива, причем $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Опр. Гипотеза Θ_0 называется простой, если она состоит из одной точки: $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, и сложной в противном случае.

Пусть $\varphi(X) = \varphi(X_1, \dots, X_n): 0 \leq \varphi(X) \leq 1$ – критическая функция, при этом по определению $\varphi(X)$ – это вероятность отвергнуть основную гипотезу при выборке $X_1, \dots, X_n$.

Ошибка первого рода заключается в том, что основная гипотеза H_0 отвергается, в то время как она верна; ошибка второго рода – H_0 принимается, в то время как она неверна. Исходя из определения критической функции (критерия), вероятностью ошибки первого рода является математическое ожидание $E_{\theta}\varphi(X) = \alpha(X)$, $\theta \in \Theta_0$.

Лемма (Нейман, Пирсон). Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ имеет функцию распределения $F(X, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset R$ и функцию правдоподобия $L(X, \theta)$. Введем класс Φ критических функций: относительно двух простых гипотез $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta = \theta_1 \neq \theta_0$, $0 < \alpha < 1$, где α – заданный размер критерия, K_{α} – некоторое значение:

$$\Phi = \left\{ \varphi: \varphi(X) = \begin{cases} 1, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > K_{\alpha}, \\ 0, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} < K_{\alpha}. \end{cases} \right\}$$

Отметим, что класс включает в себя все функции, удовлетворяющие указанным условиям и принимающие при $\frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} = K_\alpha$ любые значения. Отметим также, что для разных значений K_α соответствующие классы Φ будут, вообще говоря, разными. Тогда:

1. $\forall 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \exists \varphi \in \Phi : E_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha$ (существует критерий любого размера);
2. Если $\varphi \in \Phi$ и $E_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha$, то φ – наиболее мощный критерий;
3. Если φ – наиболее мощный критерий размера α , то $\varphi \in \Phi$ (необходимость).

14. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Опр. Доверительным интервалом с коэффициентом доверия $0 \leq \alpha \leq 1$ называется совокупность двух статистик $(T_1(X), T_2(X))$ таких, что

1. $\forall \theta \Rightarrow T_1(X) \leq T_2(X)$ почти всюду,
2. $\forall \theta \Rightarrow P_\theta(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq \alpha$ (иногда = или >).

Опр. Нормальным называют распределение вероятности непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

Распределение определяется двумя параметрами: α – математическое ожидание, σ – среднее квадратичное отклонение нормального распределения.

Пояснение терминов:

$\bar{x}_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ – выборочная средняя,

$s^2 = \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_n)^2 / (n-1)$ – исправленная дисперсия (n_i – частота значения x_i),

$s = \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_n)^2 / (n-1)}$ – исправленное среднее квадратическое отклонение.

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ :

доверительный интервал $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр α ; точность оценки $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ .

Итак, пользуясь распределением Стьюдента, нашли доверительный интервал $(\bar{x} - t_\gamma S/\sqrt{n}, \bar{x} + t_\gamma S/\sqrt{n})$, покрывающий параметр α с надежностью γ (t_γ находится по таблице по заданным n и γ).

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения.

Вычислив по выборке s и найдя по таблице q , получим искомый доверительный интервал $(*)$, покрывающий σ с заданной надежностью γ , т.е. интервал $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$.

15. Виды сходимости последовательностей случайных величин

Определение 1: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ по вероятности: $\lim_{n \rightarrow \infty}^P \xi_n = \xi$, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$

Определение 2: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ с вероятностью 1 (почти всюду): $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с вероятностью 1}} \xi$, если $P(\omega: \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = 1$

Определение 3: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ в среднем порядка $\alpha > 0$: $\xi_n \rightarrow \xi$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi|^\alpha = 0$

Определение 4: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ по распределению: $\xi_n \rightarrow \xi$, если $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x), \forall x_0 \Rightarrow F_\xi(x_0)$ непрерывна.

Определение 5: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ слабо: $\xi_n \Rightarrow \xi$, если для любой непрерывной ограниченной функции ϕ верно: $\lim_{n \rightarrow \infty} E\phi(\xi_n) = E\phi(\xi)$

Покажем следующие импликации:



16. Основная теорема матричных игр

Определение: Смешанной стратегией (СС) 1го игрока игры Γ называется вероятностное

распределение ϕ на множестве стратегий X .

Определение: Антагонистическая игра $\bar{\Gamma} = \langle \{\phi\}, \{\psi\}, F(\phi, \psi) \rangle$ наз. смешанным расширением игры Γ .

Определение: Решение $(\phi^0, \psi^0, v = F(\phi^0, \psi^0))$ игры $\bar{\Gamma}$ наз. решением исходной игры Γ в СС. При этом ϕ^0, ψ^0 наз. оптимальными смешанными стратегиями игроков, а v — значением игры Γ .

Теорема [Т4 с.18]: (Основная теорема матричных игр):

Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

17. Иерархические игры и их решение

Игра Γ_1

Пусть X, Y – компакты в метрических пространствах, а F, G – непрерывны на $X \times Y$

$$\Gamma_1: x \xrightarrow{2} y$$

– одношаговая игра с полной информацией (2ой игрок знает ход 1го). Например, игрок 1 – центр, x – цена, игрок 2 – производитель, а y – продукция.

$$g: X \rightarrow Y, \quad g(x) \in Y.$$

Первый игрок выбирает x , а 2ой – $g(x)$:

$$F(x, g) = F(x, g(x))$$

$$G(x, g) = G(x, g(x))$$

$\Gamma_1 = \langle X, g(x), F(x, g), G(x, g) \rangle$ – нормальная форма.

Искать будем не ситуацию равновесия, а гарантированный выигрыш 1го игрока $W(x)$. Пусть 2ой игрок, зная x , выбирает y из множества наилучших ответов:

$$Y(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{Arg\,max}} G(x, y)$$

– непустое и является компактом, след. минимум достигается. $W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$ – гарантированный выигрыш 1го игрока при выборе стратегии x . Наилучший гарантированный результат имеет вид $F_1 = \sup_{x \in X} W(x) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$.

Стратегия x^ε наз. ε – оптимальной, если $W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Решить иерархическую игру – найти F_1 и ε – оптимальную стратегию x^ε при заданном $\varepsilon > 0$.

Игра Γ_2

Игрок 1 перед выбором x имеет полную информацию об y . Он ходит первым и сообщает игроку 2 стратегию вида $f: Y \rightarrow X$. Множество всех таких стратегий – $\{f\}$. Схема сообщений в игре $\Gamma_2: f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$.

Эконом.интерпр.: $f(y)$ – величина премии, обещ. центром за произведенную продукцию y .

Наилучший гарантированный результат F_2 игрока 1 в Γ_2 : пусть 2ой игрок, зная f , выбирает y из множества $Y(f) = \underset{y \in Y}{\operatorname{Arg\,max}} G(f(y), y)$. $Y(f)$ м.б. пусто если f – разрывна, тогда будем считать, что 2ой может выбрать $\forall y \in Y$. Определим мн-во:

$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f), Y(f) \neq \emptyset \\ Y, Y(f) = \emptyset \end{cases}$$

Тогда 2ой игрок выбирает $y \in Y^*(f)$ и оценка эффективности стратегии f задается формулой: $W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y)$ и наилучший гарантированный результат 1го игрока имеет вид:

$$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f) = \sup_{f \in \{f\}} \min_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y)$$

Стратегия f^ε наз. ε – оптимальной, если $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Поиск величины F_2 по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве ф-ций $\{f\}$. Обычно ф-лу для F_2 упрощают чтобы искать по исходным множествам X, Y .

Игра Γ_3

Пусть игрок 2 играет против игрока 1 в игру Γ_2^* , т.е. сообщает ему стратегию $g: X \rightarrow Y$ (так называемую, функцию ответа). Игрок 1 в Γ_3 первым сообщает игроку 2 стратегию $f_1: \{g\} \rightarrow X$. Схема сообщений в $\Gamma_3: f_1 \xrightarrow{2} g \xrightarrow{1} x = f_1(g) \xrightarrow{2} y = g(x)$.

Эконом.интерпр.: $f_1(g)$ – величина ресурса, который выделяет центр производителю продукции, когда тот сообщает ему свои произв. возможности (ф-цию g).

Наилучший гарантированный результат 1го игрока в Γ_3 :

$$F_3 = \sup_{f_1 \in \{f_1\}} \min_{g \in Y^*(f_1)} F(f_1(g), g),$$

где $Y^*(f_1) = \begin{cases} Y(f_1), Y(f_1) \neq \emptyset \\ \{g\}, Y(f_1) = \emptyset \end{cases}$, $Y(f_1) = \underset{g \in \{g\}}{\operatorname{Arg\,max}} G(f_1(g), g)$.

18. Теорема Гермейера о решении игры

Нам потребуются следующие величины и множества:

$$G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y) \text{ — наилучший гарантированный результат второго игрока при условии, что первый применяет по отношению к нему стратегию "наказания" } f^H : f^H(y) \in \operatorname{Argmin}_{x \in X} G(x, y) \quad \forall y \in Y;$$

$$E = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y) \text{ — множество максиминных стратегий второго игрока;}$$

$$D = \{(x, y) \in X \times Y \mid G(x, y) > G_2\};$$

$$K = \begin{cases} \sup_{(x, y) \in D} F(x, y), & D \neq \emptyset, \\ -\infty, & D = \emptyset; \end{cases}$$

$$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y).$$

Теорема 1 (Гермейер).

В сделанных предположениях наилучший гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 равен $F_2 = \max[K, M]$.

19. Принцип уравнивания в задаче оптимального распределения ресурсов

Пусть $i = 1, \dots, n$ — номера n пунктов, по которым оперирующая сторона распределяет ресурс. Через $f_i(t)$ обозначим функцию, определяющую эффект от вложения ресурса. При этом на i -й пункт направляется ресурс в количестве x_i .

Будем рассматривать два вида задач: непрерывные, где ресурс предполагается бесконечно-непрерывным, и дискретные, где ресурс — штучный, а A и x_i — целые числа. Для непрерывной задачи множество стратегий имеет вид

$$M_0 = \left\{ x \in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\},$$

а для дискретной

$$M'_0 = \left\{ x \in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1, \dots, n \right\}.$$

Рассмотрим следующую непрерывную задачу

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0). \quad (I)$$

По смыслу оперирующая сторона стремится максимизировать свертку вида $\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$, т.е. минимальный эффект от вложения ресурса. Это отвечает социалистическому принципу: "чтобы не было бедных". Максиминную стратегию x_i^0 будем называть *оптимальным распределением ресурса*.

Задачу (I) будем рассматривать в предположении, что все функции $f_i(t)$ непрерывны и возрастают на отрезке $[0, A]$. Кроме того, без потери общности будем считать, что $f_1(0) \leq f_2(0) \leq \dots \leq f_n(0)$. Будем условно говорить, что первый пункт является слабейшим: если пункт не выделяется ресурс, то эффект на первом пункте будет наименьшим.

Теорема 1 (принцип уравнивания Гермейера).

В сделанных предположениях пусть x^0 – оптимальное распределение ресурса в задаче (I). Тогда для x^0 выполнено следующее необходимое и достаточное условие: найдется такое целое k , $1 \leq k \leq n$, что

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0), \quad i = 1, \dots, k-1, \\ x_i^0 = 0, \quad i = k+1, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

Если $f_1(0) = f_2(0) = \dots = f_n(0)$, то $k = n$. Во всех случаях оптимальное распределение ресурса x^0 единственно.

20. Выпуклые множества и выпуклые функции. Необходимое и достаточное условие оптимальности в общей задаче минимизации

Определение. Функция $J(u)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве U , если

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) \quad \forall u, v \in U, \forall \alpha \in [0, 1].$$

И введём несколько новых понятий:

Определение. Функция $J(u)$ называется *строго выпуклой*, если

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) \quad \forall u, v \in U, u \neq v, \forall \alpha \in (0, 1).$$

Определение. Функция $J(u)$ называется *сильно выпуклой* с коэффициентом $\kappa > 0$, если

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1 - \alpha)\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in U, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Теорема 5. (о локальном минимуме выпуклой функции)

Пусть множество U выпуклое, функция $J(u)$ выпукла на U , $J_* > -\infty$ тогда:

- 1) любая точка локального минимума $J(u)$ на U является точкой глобального минимума;
- 2) если $U_* \neq \emptyset$, то U_* выпукло;
- 3) если $U_* \neq \emptyset$, а $J(u)$ строго выпукла, то $U_* = \{u_*\}$ (состоит из одного элемента).

Теорема 6. (сильно выпуклый вариант теоремы Вейерштрасса)

Пусть H – гильбертово пространство, множество $U \subset H$ выпукло и замкнуто (не обязательно ограничено!), функция $J(u)$ сильно выпукла с коэффициентом κ и полунепрерывна снизу на U (т.е. и слабо полунепрерывна снизу) тогда:

- 1) $J_* > -\infty$;
- 2) $U_* = \{u_*\} \neq \emptyset$;
- 3) $\forall u \in U \quad \frac{\kappa}{2}\|u - u_*\|_H^2 \leq J(u) - J(u_*)$.

Теорема 7. (критерий выпуклости для дифференцируемых функций)

Пусть H – гильбертово пространство, множество $U \subset H$ выпукло, $J(u) \in C^1(U)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $J(u)$ выпукла;
- (b) $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle_H \quad \forall u, v \in U$;
- (c) $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle_H \geq 0 \quad \forall u, v \in U$.

Если, кроме того, $J(u) \in C^2(U)$ и $\text{int}U \neq \emptyset$, то эквивалентны утверждения (a)–(c) и утверждение

- (d) $\langle J''(u) \cdot h, h \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U, \forall h \in H$.

Теорема 8. (критерий сильной выпуклости для дифференцируемых функций)

Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, множество $U \subset \mathbb{H}$ выпукло, $J(u) \in C^1(U)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a') $J(u)$ сильно выпукла с коэффициентом $\kappa > 0$;
- (b') $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\kappa}{2} \|u - v\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall u, v \in U$;
- (c') $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle_{\mathbb{H}} \geq \kappa \|u - v\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall u, v \in U$.

Если, кроме того, $J(u) \in C^2(U)$ и $\text{int}U \neq \emptyset$, то эквивалентны утверждения (a') – (c') и утверждение

- (d') $\langle J''(u) \cdot h, h \rangle_{\mathbb{H}} \geq \kappa \|h\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall u \in U, \forall h \in \mathbb{H}$.

Теорема 9. (условия оптимальности в форме вариационного неравенства)

Пусть множество U - выпукло, $J(u) \in C^1(U)$. Тогда

- 1) если $u_* = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} J(u)$, то $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$ (1);
- 2) если $u_* \in \text{int}U$, то $J'(u_*) = 0$;
- 3) если выполняется (1), а $J(u)$ выпукла, то $u_* = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} J(u)$.

21. Задачи линейного программирования: прямая и двойственная, их свойства. Основная идея симплекс-метода

Общая задача линейного программирования рассматривается на множестве

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, u \rangle = b_i, \langle \bar{a}_i, u \rangle \leq \bar{b}_i, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, s}\} \quad (1)$$

Если ввести ряд обозначений:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \dots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \dots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix},$$

то множество U можно описать в более компактной матричной форме:

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = b, \bar{A}u \leq \bar{b}\}.$$

Наряду с общей задачей (1) мы будем рассматривать каноническую задачу линейного программирования на множестве

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = b, u \geq 0\}. \quad (2)$$

Определение. Точка v выпуклого множества U называется *угловой точкой* этого множества, если из соотношения $v = \alpha x + (1 - \alpha)y$, где $x, y \in U, \alpha \in (0, 1)$, следует, что $v = x = y$.

Теорема 19. (критерий угловой точки для канонического U)

Пусть $A = (A_1 | A_2 | \dots | A_n)$ (расписано по столбцам). Точка v является угловой точкой канонического множества U тогда и только тогда, когда существует набор столбцов $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_r$), $r = \text{rank } A$, причём

$$A_{j_1} v_{j_1} + A_{j_2} v_{j_2} + \dots + A_{j_r} v_{j_r} = b, \quad (3)$$

где $v_{j_i} \geq 0$ ($i = \overline{1, r}$), а $\forall j \notin J_b = \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \quad v_j = 0$.

Определение. Угловая точка v канонического множества U называется невырожденной, если $v_j > 0, \forall j \in J_b$. Эти координаты (j) называются базисными для точки v :

$$B = (A_{j_1} | A_{j_2} | \dots | A_{j_r}) - \text{базис } v.$$

Определение. Если у множества U все угловые точки невырожденные, то задана минимизации (2) называется невырожденной.

Теорема 20. (к задаче линейного программирования)

В задаче линейного программирования выполняются следующие утверждения:

- 1) если $U \neq \emptyset$, то в U существует по крайней мере одна угловая точка;
- 2) если $J_* > -\infty$, то во множестве U_* содержится по крайней мере одна точка.

Симплекс-метод.

Симплекс-метод — алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Задача линейного программирования состоит в том, что необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве. В результате все неравенства ограничивают некоторый многогранник (возможно, бесконечный), называемый также полиэдральным комплексом. Уравнение $W(x) = c$, где $W(x)$ — максимизируемый (или минимизируемый) линейный функционал, порождает гиперплоскость $L(c)$. Зависимость от c порождает семейство параллельных гиперплоскостей. Тогда экстремальная задача приобретает следующую формулировку — требуется найти такое наибольшее c , что гиперплоскость $L(c)$ пересекает многогранник хотя бы в одной точке. Заметим, что пересечение оптимальной гиперплоскости и многогранника будет содержать хотя бы одну вершину, причём, их будет более одной, если пересечение содержит ребро или k -мерную грань. Поэтому максимум функционала можно искать в вершинах многогранника. Принцип симплекс-метода состоит в том, что выбирается одна из вершин многогранника, после чего начинается движение по его рёбрам от вершины к вершине в сторону увеличения значения функционала. Когда переход по ребру из текущей вершины в другую вершину с более высоким значением функционала невозможен, считается, что оптимальное значение c найдено.

Последовательность вычислений симплекс-методом можно разделить на две основные фазы:

1. нахождение исходной вершины множества допустимых решений,
2. последовательный переход от одной вершины к другой, ведущий к оптимизации значения целевой функции.

При этом в некоторых случаях исходное решение очевидно или его определение не требует сложных вычислений, например, когда все ограничения представлены неравенствами вида «меньше или равно» (тогда нулевой вектор совершенно точно является допустимым решением, хотя и, скорее всего, далеко не самым оптимальным). В таких задачах первую фазу симплекс-метода можно вообще не проводить. Симплекс-метод, соответственно, делится на однофазный и двухфазный.

22. Описание статистической модели Леонтьева. Условие продуктивности.

Введем следующие обозначения:

$x_i(t)$ - валовой выпуск i -ой отрасли в период t (также может использоваться термин *объем производства*);

$z_{ij}(t)$ - объем продукции i -ой отрасли, используемой в период t в j -ой отрасли;

$w_i(t)$ - конечный выпуск i -ой отрасли.

Отметим, что на самом деле величина $\frac{z_{ij}(t)}{x_j(t)}$ слабо зависит от времени. Соответственно,

Леонтьевым была выдвинута гипотеза о следующей пропорциональности:

$\frac{z_{ij}(t)}{x_j(t)} \approx a_{ij}$ - это число является *нормой затрат* продукции i -ой отрасли на выпуск

единицы продукции j -ой отрасли.

Из этих чисел можно составить матрицу, называемую *матрицей межотраслевого баланса*

Леонтьева: $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$, где n – число отраслей.

Очевидно, что валовой выпуск составляется из сырьевых затрат и конечного выпуска:

$x_i(t) = \sum_{j=1}^n z_{ij}(t) + w_i(t)$. Тогда используя гипотезу Леонтьева, запишем

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) a_{ij} + w_i(t).$$

Далее введем:

- вектор валового выпуска $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$;

- вектор конечного выпуска $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$.

Тогда связь между валовым выпуском и конечным выпуском выглядит следующим образом: $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{w}$ (*). При этом накладываются следующие условия: $\bar{w} > 0$ (все компоненты этого вектора строго положительны), $\bar{x} \geq 0$ (все компоненты этого вектора неотрицательны), $A \geq 0$ (все элементы матрицы неотрицательны). Тогда уравнение (*) вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов $\bar{x}$, $\bar{w}$ называется

статистической моделью Леонтьева.

При этом задача формулируется следующим образом: при заданном векторе $\bar{w}$ требуется определить необходимый вектор $\bar{x}$ валового выпуска, т.е. решить систему

$$\begin{cases} \bar{x} = A\bar{x} + \bar{w} \\ \bar{w} > 0, \bar{x} \geq 0, A \geq 0 \end{cases} \quad (1).$$

Отметим, что когда решение системы (1) существует для любого неотрицательного вектора $\bar{w}$, говорят, что модель Леонтьева (и матрица A) *продуктивна*.

Условие продуктивности

Опр.1. Пусть $D = \|d_{ij}\|_{i,j=1}^n$ удовлетворяет условию $d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$. Будем говорить, что D является *продуктивной* матрицей, если существует такой вектор $\bar{x} \geq 0$, что $D\bar{x} > 0$. Теперь дадим определение относительно модели Леонтьева.

Опр.2. Будем говорить, что неотрицательная квадратная матрица A *продуктивна*, если $\exists \bar{x} \geq 0, \bar{w} > 0$ такие, что $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{w}$.

Теорема Фробениуса-Перрона.

Пусть A неотрицательная квадратная матрица. Тогда:

1) среди собственных чисел матрицы A есть неотрицательные вещественные числа и наибольшему из них $\lambda(A)$ соответствует неотрицательный собственный вектор;

2) $\exists$ матрица $(\rho E - A)^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow \rho > \lambda(A)$;

3) если $A\bar{x} \geq \mu \bar{x}$, $\bar{x} \geq 0, \bar{x} \neq 0$, то $\lambda(A) \geq \mu$;

4) если $A\bar{z} = \varpi \bar{z}$, $\bar{z} \neq 0$, то $|\varpi| \leq \lambda(A)$.

Опр.3. Собственное число $\lambda(A)$ называется *числом Фробениуса-Перрона* матрицы A , а вектор $\bar{x}_A \geq 0$, $\bar{x}_A \neq 0$ (все координаты вектора ненулевые и одного знака, т.е. его можно выбрать положительным) называется *вектором Фробениуса-Перрона* матрицы A .

Отметим, что вектор Фробениуса-Перрона определен неоднозначно (с точностью до скалярного множителя).

Теорема

Матрица A (модель Леонтьева) продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса-Перрона удовлетворяет условию $\lambda(A) < 1$.

23. Модель Курно

Опр. Игрой в нормальной форме называется тройка $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i(x_i, x_{-i})\}_{i \in N}\}$.

Опр. Будем говорить, что исход игры $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ называется *равновесием по Нэшу*, если $\forall i \in N$ функция выигрыша $u_i(x_i, x_{-i}^*) \leq u_i(x_i^*, x_{-i}^*)$, $\forall x_i \in X_i$.

Теорема Нэша.

Пусть $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i(x_i, x_{-i})\}_{i \in N}\}$ - игра в нормальной форме такая, что:

- 1) $\forall i \in N$ множество X_i , являющееся подмножеством линейного топологического пространства, представляет собой выпуклый компакт;
- 2) $\forall i \in N$ функция $u_i(x_i, x_{-i})$ непрерывна по (x_i, x_{-i}) на X ;
- 3) $\forall i \in N \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}$ функция $u_i(x_i, x_{-i})$ вогнута по x_i на X_i .

Тогда в игре Γ существует равновесие по Нэшу.

Модель олигополистической конкуренции Курно.

Пусть $P(x)$ - обратная функция спроса. Мы требуем выполнения условий (A1):

$P(x) \in C^2$ (дважды непрерывно дифференцируема);

$P(0) > 0$;

$P'(x) < 0$ (убывающая функция);

$\exists M > 0 : P(M) = 0$.

Кроме того, будем предполагать, что функция $xP(x)$ вогнута по x (если $P''(x) \leq 0$, то $(xP(x))'' = P''(x)x + 2P'(x) < 0$).

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ - множество производителей; $\forall i \in N \quad x_i \in [0, M]$ - объем выпуска i -го производителя; $c_i(x_i)$ - издержки i -го производителя при производстве объема выпуска x_i .

Введем предположения (A2) относительно издержек:

$c_i(x_i) \in C^2$, $\forall i \in N$

$c_i'(x_i) > 0$

$c_i''(x_i) \geq 0$ (функция выпукла).

Обозначим через $u_i(x_i, x_{-i}) = x_i P\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) - c_i(x_i)$ прибыль i -го производителя (в терминах

теории игр, это его функция выигрыша). Задача i -го производителя - максимизировать свою прибыль.

Мы описали модель Курно и задали игру в нормальной форме:

- 1) $X_i = [0, M]$, $i = 1, n$ - множество стратегий
- 2) N - множество игроков
- 3) $\{u_i(x_i, x_{-i})\}_{i=1}^n$ - функции выигрыша.

Теорема.

Пусть выполняются условия (A1) и (A2). Тогда в модели Курно существует равновесие по Нэшу.

24. Постановка задачи оптимального управления. Понятие о задаче синтеза

Будем считать, что вектор начального состояния управляемого объекта x_0 принадлежит множеству начальных состояний $M_0 \in \mathfrak{R}^n$: $x(t_0) \in M_0$. Если необходимо перевести объект из начального состояния в конечное ($t_0 \leq t \leq t_1$), то вводится множество конечных состояний M_1 : $x(t_1) \in M_1$.

Рассмотрим функционал $J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt$, где $f^0(t, x, u)$ - известная функция своих

аргументов. Функционал J сопоставляется каждой паре $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, где

$u(t)$ - допустимое управление,

$x(t)$ - соответствующая ему траектория с начальным условием $x(t_0) \in M_0$,

удовлетворяющая требованию $x(t_1) \in M_1$. Функционал J называется *критерием качества управления*.

Перейдем, непосредственно, к самой постановке задачи ОУ. Необходимо перевести объект из множества M_0 на множество M_1 за счет выбора допустимого управления $u(t) \in D_U$ так, чтобы минимизировать функционал J :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u(t)), & x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m \\ x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1 \\ J \rightarrow \min_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}.$$

Управление, решающее данную систему, называется *оптимальным управлением*.

Задача синтеза.

Опишем линейную модель математического маятника:
$$\begin{cases} \ddot{y} + y = u(t), & |u(t)| \leq 1 \\ y(0) = a, y(T) = 0 \\ \dot{y}(0) = b, \dot{y}(T) = 0 \\ T \rightarrow \min_{u \in U} \end{cases}.$$

$U = \{(u_1, u_2) \in E^2 : u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$. Обозначим $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$. Тогда задача записывается так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \overset{=0}{x_2} + u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2 \\ x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ x(T) = 0 \\ T \rightarrow \min_{u \in U} \end{cases}. \text{ Будем далее обозначать управление } u_2 \text{ через } u.$$

Матрица вращения имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

25. Множество достижимости линейной управляемой системы. Его опорная функция.

Рассмотрим задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min \end{cases}, u(t) \in I_U$$

Множество достижимости $X(t) = X(t_0, t, M_0)$. Введем множество $X(t_0, \tau, M_0)$, определяемое множеством M_0 (множество начальных состояний управляемого объекта $x(t_0) \in M_0$), начальным моментом t_0 . Число $\tau > t_0$ зависит от класса допустимых управлений $I = I_U$ и матрицы A . Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ t_0 \leq t \leq \tau \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 \end{cases}$$

Ее решение будет $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s)ds$ (из формулы Коши и теоремы Каратеодори).

Вопрос: куда можно перейти к моменту времени τ по траекториям дифференциального уравнения, исходя в начальный момент времени t_0 из различных начальных точек $x_0 \in M_0$, если разрешается использовать всевозможные допустимые управления $u(t) \in I_U$. Множество концов $x(\tau)$ описанных выше траекторий образуют множество в E^n , которое называется *множеством достижимости*.

Опр. Множество достижимости – это множество концов $x(\tau)$ траекторий при различном выборе $x_0 \in M_0$, $u(s) \in I_U$.

Свойства множества достижимости $X(t)$:

$$1. \quad X(t) \equiv X(t_0, t, M_0) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}I_U ds, t_0 < t_1, X(t_0) = M_0$$

2. Опорная функция

$$C(X(t), \psi) = C(e^{(t-t_0)A}M_0, \psi) + \int_{t_0}^t C(e^{(t-s)A}U, \psi) ds$$

Для получения формулы следует использовать свойства опорных функций: аддитивности по первому аргументу, теоремы о внесении знака опорной функции по первому аргументу, о внесении знака опорной функции под знак интеграла.

3. Если $M_0 \in \Omega(E^n) \Rightarrow X(t) \in \Omega(E^n)$, если $M_0 \in \text{conv} \Omega(E^n) \Rightarrow X(t) \in \text{conv} \Omega(E^n)$, если $M_0 = \{x_0\} \Rightarrow x(t) \in \text{conv} \Omega(E^n)$

4. Непрерывная зависимость $X(t)$ от t : при $t' \rightarrow t \Rightarrow h(X(t'), X(t)) \rightarrow 0$

5. Непрерывная зависимость $X(t)$ от $\tau = t - t_0$ $X(\tau) = e^{\tau A}M_0 + \int_0^\tau e^{\alpha A}U d\alpha$

26. Управляемость и локальная управляемость линейных систем.

Множество управляемости $Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$. Введем множество $Z(\tau, t_1, M_1)$, оно определяется множеством M_1 (множеством конечных состояний управляемого объекта), моментом времени t_1 и числом $\tau < t_1$, которое зависит от матрицы A и класса допустимых управлений I_U . Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ \tau \leq t \leq t_1 \\ x(t_1) = x_1 \in M_1 \end{cases}$$

Решение: $x(t) = e^{(t-t_1)A} x_1 + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A} u(s) ds = e^{(t-t_1)A} x_1 + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A} [-u(s)] ds$.

Множество $Z(\tau, t_1, M_1)$ - множество управляемости.

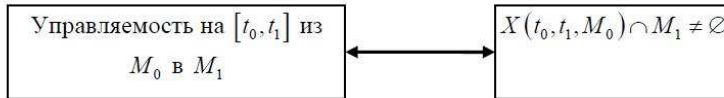
Опр. Множество управляемости – это множество всех таких точек $z \in E^n$, находясь в которых в момент времени τ , объект в момент времени t_1 попадет на множество M_1 при помощи допустимого управления $u(s)$.

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \left\{ z \in E^n : z = x(\tau), x(t) = e^{(t-t_1)A} x_1 + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A} [-u(s)] ds \Big|_{t=\tau}, x(t_1) \in M_1, u(t) \in I_U \right\}$$

или

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \bigcup_{\substack{x_1 \in M_1 \\ u(s) \in I_U}} \left\{ e^{(t-t_1)A} x_1 + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A} [-u(s)] ds \right\}.$$

Опр. Объект называется управляемым на $[t_0, t_1]$ из множества M_0 в множество M_1 , если существует допустимое управление $u(s) \in I_U$ и отвечающая ему траектория $x(t)$ (т.е. $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ для почти $\forall t \in [t_0, t_1]$) с начальным условием $x(t_0) = M_0, x(t_1) \in M_1$



Теорема (критерий управляемости).

1) Если $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$ (компакты), то $C(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} C(U, \psi(s)) ds + C(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0$

является необходимым условием управляемости на $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 ;

2) Если $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(E^n)$ (выпуклый компакт), то условие

$$C(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} C(U, \psi(s)) ds + C(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0$$

является необходимым и достаточным условием управляемости на $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 ;

Введем функцию управляемости:

Опр. Функция управляемости

$$\Phi_0(\psi) = C(M_0, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} C(U, e^{-(s-t_0)A^*} \psi) ds + C(M_1, e^{-(t_1-t_0)A^*} \psi).$$

Положим $m_0 = \min_{\psi \in S} \Phi_0(\psi)$.

Условие управляемости эквивалентно каждому из 3 условий:

1. $\Phi_0(\psi) \geq 0, \forall \psi \in E^n$
2. $\Phi_0(\psi) \geq 0, \forall \psi \in S$
3. $m_0 \geq 0$

Чтобы доказать неуправляемость надо найти $\tilde{\psi} \in S : \Phi_0(\tilde{\psi}) < 0$.

Основная лемма.

1) $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(E^n)$;

2) $t_1 - t_0 \rightarrow \min$, $t_1 - t_0$ - оптимальное время перехода из M_0 в исходной задаче.

$\Rightarrow \exists$ сопряженная переменная $\psi(t) : C(X(t_1), \psi(t_1)) + C(M_1, -\psi(t_1)) = 0$ или

$$C(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} C(U, \psi(s)) ds + C(M_1, -\psi(t_1)) = 0$$

Локальная управляемость.

Рассмотрим управляемый объект $\dot{x} = Ax + u, I = I_U, M_1 \in \Omega(E^n)$, пусть $[t, t_1]$ – заданный отрезок $t < t_1$

Опр. Объект называется локально управляемым на заданном отрезке $[t, t_1]$ на множестве M_1 , если $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall y \in M_1 + S_\varepsilon(0)$ объект является локально управляемым на отрезке $[t, t_1]$ из одноточечного множества $M_0 = \{y\}$ на множестве M_1 , т.е. объект локально управляем на $[t, t_1]$ на множестве M_1 , если $\exists \varepsilon > 0 : M_1 + S_\varepsilon(0) \subset Z(t, t_1, M_1)$

Необходимое условие локальной управляемости.

$$\exists \varepsilon > 0 : C(M_1, \psi) + \varepsilon \|\psi\| \leq C(Z(t), \psi) \quad \forall \psi \in E^n$$

или

$$C(M_1, \psi) \leq C(Z(t), \psi) \quad \forall \psi \in s,$$

если M_1 – выпуклое, тогда это условие является необходимым и достаточным.

Теорема (о достаточных условиях оптимальности в форме ПМП с условием локальной управляемости)

- 1) $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$;
- 2) $(x(t), u(t))$ – удовлетворяет ПМП на $[t_0, t_1]$;
- 3) объект локально управляем на множестве M_1 на любом отрезке времени $[t, t_1]$, $t_0 \leq t < t_1$

Тогда $(x(t), u(t))$ – оптимальна

27. Принцип Максимума Понтрягина для линейной задачи быстродействия.

Рассмотрим задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min \end{cases}, u(t) \in I_U$$

Набор $\{A, M_0, M_1, I = I_U, t_0\}$, $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$.

Основная лемма. $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(E^n), t_1 - t_0 \rightarrow \min \Rightarrow \exists \psi(t)$ – сопряженная переменная, что выполнено $C(X(t_1), \psi(t_1)) + C(M_1, \psi(t_1)) = 0$ или

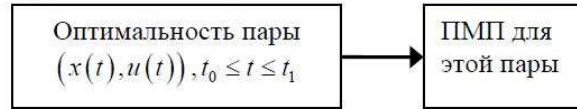
$$C(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} C(U, \psi(s)) ds + C(M_1, -\psi(t_1)) = 0.$$

Опр. Пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, где 1) $u(t) \in I$, т.е. $u(t)$ – допустимое управление на, определенное на отрезке $[t_0, t_1]$, $\forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow u(t) \in U$ 2) $x(t)$ – траектория, отвечающая уравнению $u(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ почти для всех $t \in [t_0, t_1]$, $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина (ПМП) на отрезке $[t_0, t_1]$, если $\exists \psi(t)$ – сопряженная переменная (ненулевое решение $\dot{\psi}(t) = -A^* \psi(t)$):

- 1) $(u(t), \psi(t)) = C(U, \psi(t))$ почти для всех $t \in [t_0, t_1]$ (условие максимума);
- 2) $(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0, \psi(t_0))$ условие трансверсальности на множестве M_0 ;
- 3) $(x(t_1), \psi(t_1)) = C(M_1, -\psi(t_1))$ условие трансверсальности на множестве M_1 .

Теорема (о необходимых условиях оптимальности в форме ПМП)

- 1) $M_0, M_1 \in \text{conv} \Omega(E^n)$;
- 2) допустимая пара $(x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq t_1$ решает линейную задачу быстрогодействия, тогда $(x(t), u(t))$ удовлетворяет ПМП.



28. Уравнения в вариациях. Построение конуса касательных направлений к множеству достижимости.

Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, x \in E^n$.

Считается, что управление $u(t)$ - кусочно-непрерывная на $t_0 \leq t \leq t_1$ функция со значениями в m -мерном пространстве E^m , непрерывная слева в каждой точке разрыва и имеющая предел справа.

Получим $\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{\partial f(x(t), x_0, t_0, t)}{\partial x} y(t) \\ y(t_0) = h \end{cases}$ - система уравнений в вариациях.

В старых обозначениях $\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y(t) \\ y(t_0) = h \end{cases}$. (1)

Уравнение $\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\right)^* \psi$ - сопряженное. (2)

Лемма: $y(t)$ - решение уравнения (1), $\psi(t)$ - решение уравнения (2). Тогда их скалярное произведение постоянно: $\langle \psi(t), y(t) \rangle = \text{const}$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi(t), y(t) \rangle &= \langle \dot{\psi}, y \rangle + \langle \psi, \dot{y} \rangle = -\left\langle \left(\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x}\right)^* \psi(t), y(t) \right\rangle + \left\langle \psi, \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y(t) \right\rangle = \\ &= -\left\langle \psi, \frac{\partial f}{\partial x} y \right\rangle + \left\langle \psi, \frac{\partial f}{\partial x} y \right\rangle = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Введем понятие **вариаций Макшейна**.

Рассмотрим вариации управления и траекторий.

- 1) Пусть $\tau \in [t_0, t_1]$ - точка непрерывности функции управления $u(t) \in U$. Введем $\sigma > 0$, ε - малое положительное число, $v \in U$. Берем полуинтервал $(\tau - \varepsilon \cdot \sigma, \tau) = J(\tau, \sigma, \varepsilon)$.

Рассмотрим $u_*(t) = \begin{cases} u(t), & \forall t \notin J(\tau, \sigma, \varepsilon) \\ v, & t \in J(\tau, \sigma, \varepsilon) \end{cases}$ - одночленная вариация Макшейна управления $u(t)$. Обозначается $M(\tau, \sigma, v, \varepsilon)$. Макшейн предложил изменять $u(t)$ не на всем протяжении $t_0 \leq t \leq t_1$ на малую величину ε , а на малом промежутке значений t на конечную величину v .

Хотим сравнить управляемые величины $x(t)$ и $x_*(t)$, после прохождения отрезка J , когда управление $u(t)$ заменяется на $u_*(t)$ при условии, что $x(t_0) = x_*(t_0)$.

Оказывается, что $x_*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon \cdot \sigma \cdot [f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{O}(\varepsilon)$.

Рассматривается совокупность $\{\varphi(M)\}$ в зависимости от всех вариаций Макшейна.

$K = \{\varphi(M), M \in M\}$ - конус касательных направлений к множеству достижимости в т. $x(t_1)$, которая является вершиной конуса.

29. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с интегральным функционалом

Рассмотрим систему

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = \bar{x}_1 \\ J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}, \text{ где } f(x, u) \text{ и } f^0(x, u) - \text{непрерывны по совокупности}$$

переменных в $\mathfrak{R}^n \times \bar{U}$, $\exists \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}, \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial x}$ - непрерывны по совокупности переменных в $\mathfrak{R}^n \times \bar{U}$.

Введем эквивалентную формулировку этой задачи с более лучшими свойствами.

Новая переменная x^0 и новое уравнение для нее: $\dot{x}^0 = f^0(x, u)$

Тогда $\tilde{x} = (x^0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^{n+1}$

$\tilde{f} = (f^0, f_1, \dots, f_n) \in \mathfrak{R}^{n+1}$

$$x^0(t) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(s), u(s)) ds \Rightarrow J = x^0(t_1)$$

$$(2) \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x, u) \\ \tilde{x}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \\ \tilde{x}(t_1) \in \Pi = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix}, \xi \in \mathfrak{R} \right\}, \text{ где} \\ x^0(t_1) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

Π - прямая, параллельная оси x^0 и проходящая через точку $\bar{x}_1$.

$\tilde{X}(t)$ - множество достижимости задачи (2).

Если есть решение $x(t)$ задачи (1), то мы можем найти решение $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ задачи (2),

и наоборот.

ПМП Понтрягина – необходимое условие оптимальности в задаче с интегральным функционалом:

Введем $H(x, \tilde{\psi}, u) = \langle \tilde{\psi}, \tilde{f}(x, u) \rangle = \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f^i(x, u)$.

$(x(t), u(t)), t \in [t_0, t_1]$ - оптимальная пара задач (1), (2). Тогда $\exists \tilde{\psi}(t) \neq 0$, которое есть

решение следующей сопряженной задачи $\dot{\tilde{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}}; \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial x}, i = \overline{0, n}$ (расширенная

сопряженная система) такая, что:

- 1) выполняется принцип максимума

$$H(x(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = \max_{v \in U} (H(x(t), \tilde{\psi}(t), v)) = M(x, \psi), t \in [t_0, t_1]$$
- 2) $M(x(t), \psi(t)) = \text{const}, \psi_0(t) = \text{const}, \forall t \in [t_0, t_1]$
- 3) $\psi_0(t_1) \leq 0, M(x(t_1), \psi(t_1)) = 0$

30. Понятие о методе динамического программирования

Рассмотрим на примере задачи быстродействия

$$(P) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

Проведем метод погружения. Введем параметр $\alpha = x_0$. Получим

$$(P_\alpha) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = \alpha \\ x(t_1) = x_1 - \text{зафиксируем} \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

Таким образом, $T(\alpha) = \min_{x \in X(\alpha)} (t_1 - t_0)$ - определена на множестве всех точек пространства

X , из которых возможен оптимальный переход в точку x_1 .

При решении задач мы ищем $V(x): \begin{cases} \max_{v \in U} \langle V'(x), f(x, v) \rangle = 1 \\ V(x_1) = 0, V(x) < 0 \end{cases}$

И далее $u(x) = \arg \max_{u \in U} \langle V'(x), f(x, u) \rangle$ - управление в форме синтеза.